

1 Théorème de Mittag-Leffler

🎯 **Objectif** : démontrer le théorème de Mittag-Leffler et l'appliquer.

📖 **Théorie** : analyse complexe.

📌 **Difficulté** : ★★☆☆ obligatoire.

On considère une fonction complexe $f(z)$ qui est analytique pour tout z fini, en particulier pour $z = 0$, et qui satisfait la limite,

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \left| \frac{f'(z)}{z f(z)} \right| = 0.$$

(a) Démontrer le théorème de Mittag-Leffler qui affirme que,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{f'(0)}{f(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{z - z_n} + \frac{1}{z_n} \right],$$

où les z_n sont les zéros de la fonction $f(z)$. Pour ce faire, on considère l'intégrale de contour autour des pôles simples en $\omega = 0$ et $\omega = z$,

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{f'(w)}{f(w)} \frac{dw}{w(w-z)}.$$

et on l'évalue à l'aide des fonctions suivantes,

$$g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} \quad \text{et} \quad f(z) = (z - z_n) h(z).$$

(b) Dédurre du théorème Mittag-Leffler la formule suivante,

$$f(z) = f(0) \exp\left(\frac{z f'(0)}{f(0)}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{z/z_n}.$$

(c) Utiliser cette formule pour déterminer le développement en produit de la fonction $\sin(z)/z$.

(d) Utiliser cette formule pour déterminer le développement en produit de la fonction $\cos(z)$.

2 Fonction zeta de Riemann

🎯 **Objectif** : étudier la fonction zeta.

📖 **Théorie** : analyse complexe.

📌 **Difficulté** : ★★★★★ obligatoire.

La fonction zeta de Riemann est définie comme,

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

- (a) Déterminer le domaine de convergence de la fonction $\zeta(z)$.
 (b) Montrer que la fonction,

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt,$$

et la fonction $\zeta(z)$ sont liées par la relation,

$$\Gamma(z) \zeta(z) = \int_0^{\infty} \frac{x^{z-1}}{e^x - 1} dx,$$

à l'aide de la série géométrique,

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}.$$

- (c) Evaluer l'intégrale,

$$I_1(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_{\mathcal{C}_1} \frac{w^{z-1}}{e^w - 1} dw,$$

sur le chemin ouvert \mathcal{C}_1 (Fig. 1) lorsque $z \in (1, \infty)$.

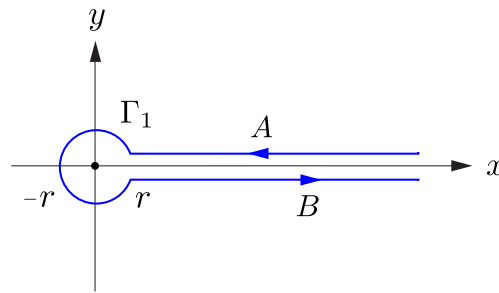
- (d) Evaluer l'intégrale,

$$I_2(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{w^{z-1}}{e^w - 1} dw,$$

sur le contour fermé $\mathcal{C}_2 = \mathcal{A} \cup \Gamma_2 \cup \mathcal{B}$ (Fig. 2) lorsque le rayon du cercle $R \rightarrow \infty$. Ce contour ne contient pas le point $w = 0$.

- (e) A l'aide du développement en produit de la fonction $\sin(z)/z$ et du développement en produit de la fonction $\Gamma(z)$,

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1} e^{kz},$$

FIGURE 1 – (c) chemin d'intégration ouvert $\mathcal{C}_1 = \mathcal{A} \cup \Gamma_1 \cup \mathcal{B}$

établir la formule des compléments d'Euler,

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

- (f) A l'aide des résultats des questions précédentes, montrer que la fonction $\zeta(z)$ satisfait l'équation fonctionnelle de Riemann,

$$\zeta(z) = 2^z \pi^{z-1} \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right) \Gamma(1-z) \zeta(1-z).$$

- (g) Calculer $\zeta(-1)$ à l'aide de la solution du problème de Bâle,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

- (h) Montrer que la partie réelle de tous les zéros z_0 non triviaux de la fonction $\zeta(z)$ sont de la forme,

$$\operatorname{Re}(z_0) = \frac{1}{2} \quad \text{si} \quad \zeta(z_0) = 0.$$

3 Effet Casimir

🎯 **Objectif** : étudier la modélisation mathématique de l'effet Casimir.

📖 **Théorie** : analyse complexe.

🔧 **Difficulté** : ★★★★★ facultatif.

On considère deux plaques métalliques parallèles très proches dans le vide. Expérimentalement, on constate qu'une petite force attractive est exercée entre les plaques. Ce phénomène est appelé l'effet Casimir. Dans le vide, les fluctuations électromagnétiques quantiques apparaissent et disparaissent sous la

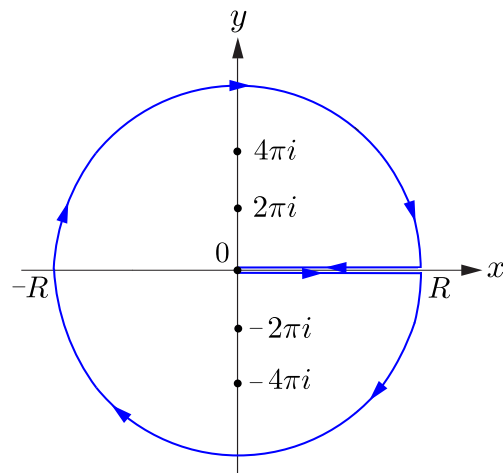
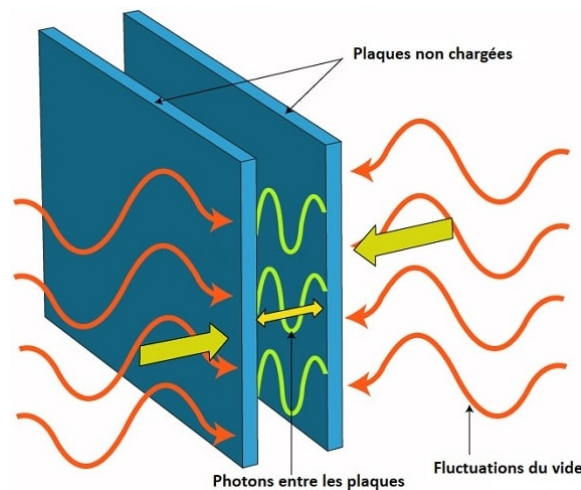
FIGURE 2 – (d) chemin d'intégration fermé \mathcal{C}_2 

FIGURE 3 – Effet Casimir entre deux plaques métalliques dans le vide

forme de modes qui peuvent avoir n'importe quelle fréquence alors qu'entre les plaques métalliques ces fréquences sont quantifiées sous forme de photons (Fig. 3). Cette contrainte diminue la densité d'énergie entre les plaques ce qui génère une force attractive. Sur le plan mathématique, la perturbation de ces fluctuations quantiques due aux plaques se décrit à l'aide d'une différence entre une série et une intégrale. Pour une fonction $f(x)$ donnée, on définit l'opérateur \mathcal{C} de la manière suivante,

$$\mathcal{C}[f] = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) - \int_0^{\infty} f(x) dx.$$

La norme de la force de Casimir F exercée entre des plaques de surface A distantes de L s'écrit,

$$F = \frac{\pi^2}{2} \frac{\hbar c}{L^4} A \lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{C}[z^3 e^{-\lambda z}],$$

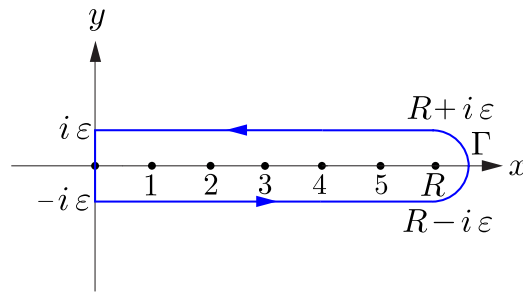


FIGURE 4 – (c) chemin d'intégration fermé $\mathcal{C} = (R + i\varepsilon, i\varepsilon] \cup [i\varepsilon, -i\varepsilon] \cup [-i\varepsilon, R - i\varepsilon] \cup \Gamma$

où $z = iy$ et $y \in \mathbb{R}$. À présent, on va calculer cette force en plusieurs étapes.

(a) Montrer que,

$$\zeta(n) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty \frac{t^{n-1}}{e^t - 1} dt.$$

où ζ est la fonction zeta de Riemann.

(b) Montrer que,

$$\pi \cot(\pi z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z - n}.$$

(c) Montrer que pour une fonction analytique $f(z)$ en $\operatorname{Re}(z) \geq 0$ on a l'identité suivante,

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \frac{f(0)}{2} + \frac{1}{2i} \oint_{\mathcal{C}} f(z) \cot(\pi z) dz.$$

où le chemin fermé \mathcal{C} est constitué du segment $(\infty + i\varepsilon, i\varepsilon]$, du segment $[i\varepsilon, -i\varepsilon]$, du segment $[-i\varepsilon, \infty - i\varepsilon)$ et du demi-cercle Γ de rayon ε centré en $R \rightarrow \infty$ (Fig. 4).

(d) Démontrer le lemme de Jordan qui affirme que l'intégrale d'une fonction analytique $f(z)$ satisfaisant la condition,

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |z f(z)| = 0,$$

sur un arc de cercle Γ dans le plan complexe s'annule pour un rayon qui tend vers l'infini,

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0 \quad \text{si} \quad |z| \rightarrow \infty.$$

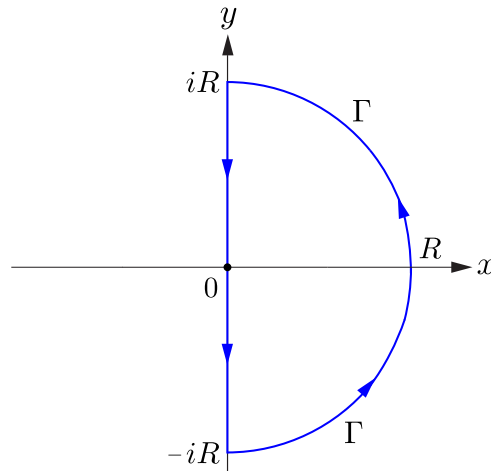


FIGURE 5 – (e) chemin d'intégration fermé $\mathcal{C} = \Gamma \cup [iR, 0] \cup [0, -iR]$

- (e) En déformant le contour \mathcal{C} afin de délimiter un demi-cercle de rayon $R \rightarrow \infty$ centré en 0 dans le demi-plan avec une partie réelle positive (Fig. 5) pour une fonction analytique $f(z)$ en $\text{Re}(z) \geq 0$, établir l'identité suivante,

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \frac{f(0)}{2} + \frac{i}{2} \int_0^{\infty} \left(f(iy) - f(-iy) \right) \coth(\pi y) dy.$$

- (f) Etablir la formule d'Abel-Plana,

$$\mathcal{C}[f] = \frac{f(0)}{2} + i \int_0^{\infty} \frac{f(iy) - f(-iy)}{e^{2\pi y} - 1} dy.$$

- (g) Montrer que la force de Casimir exercée entre les plaques de surface A séparées par une distance L s'écrit,

$$F = \frac{\pi^2}{240} \frac{\hbar c}{L^4} A,$$

en utilisant la valeur particulière de la fonction zeta de Riemann,

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}.$$